Ingeniería Investiga

Vol. 8, e1549, año 2026
ISSN – Online: 2708-3039
DOI: https://doi.org/10.47796/ing.v8i00.1549

Artículo original

Comparación entre las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko mediante elementos finitos en vigas de concreto armado

Finite element comparison of Euler–Bernoulli and Timoshenko theories in reinforced concrete beams

Jorge Enrique Alvarez Ruffran[1]* | José Claudio Guevara Bendezú[2]

Afiliación:

[1,2]Escuela Universitaria de Posgrado, Universidad Nacional Federico Villarreal, Lima, Perú.

Autor de correspondencia: E-mail: * 2023045544@unfv.edu.pe

Información del artículo:

Recibido: 14/09/2026
Aceptado: 10/10/2026
Publicado: 12/11/2026

Resumen

La precisión de la modelación estructural de vigas depende de la formulación teórica empleada. El objetivo de esta investigación fue comparar la respuesta estructural de vigas de concreto armado mediante las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko implementadas con el método de los elementos finitos. Se analizaron nueve vigas de una edificación ubicada en Tacna, Perú, considerando comportamiento elástico lineal, cargas estáticas y condiciones equivalentes de geometría, propiedades mecánicas y apoyo. Ambas formulaciones se implementaron computacionalmente y verificaron mediante Abaqus. La comparación consideró los valores máximos de momento flector y fuerza cortante. Los resultados mostraron que Euler-Bernoulli produjo valores superiores a Timoshenko, con diferencias porcentuales promedio de 0,819 % para el momento flector y 0,138 % para la fuerza cortante. Las pruebas t para muestras relacionadas evidenciaron diferencias estadísticamente significativas en ambos parámetros (p = 0,002), aunque de magnitud reducida desde el punto de vista estructural. La verificación complementaria con un modelo 2D en Abaqus presentó diferencias de 1,13 % y 1,86 % respecto de Euler-Bernoulli y Timoshenko, respectivamente. Se concluye que ambas formulaciones ofrecen respuestas globales próximas, por lo que su selección depende de la esbeltez, la influencia de la deformación por cortante y la precisión requerida.

Palabras clave: análisis estructural; concreto armado; deformación por cortante; método de elementos finitos; vigas.

Abstract

The accuracy of the structural modeling of beams depends on the theoretical formulation adopted. This study aimed to compare the structural response of reinforced concrete beams using the Euler–Bernoulli and Timoshenko theories implemented through the finite element method. Nine beams from a building located in Tacna, Peru, were analyzed under linear elastic behavior, static loading, and equivalent geometric properties, mechanical properties, and support conditions. Both formulations were computationally implemented and verified using Abaqus. The comparison considered the maximum bending moment and shear force values. The results showed that Euler–Bernoulli yielded higher values than Timoshenko, with mean percentage differences of 0.819 % for bending moment and 0.138 % for shear force. Paired-samples t-tests revealed statistically significant differences in both parameters (p = 0.002), although these differences were small in structural terms. Additional verification using a 2D model in Abaqus yielded differences of 1.13 % and 1.86 % relative to the Euler–Bernoulli and Timoshenko formulations, respectively. It is concluded that both formulations provide similar overall responses; therefore, their selection depends on beam slenderness, the influence of shear deformation, and the required level of accuracy.

Keywords: structural analysis; reinforced concrete; shear deformation; finite element method; beams.

Esta obra está bajo licencia internacional Creative Commons Reconocimiento 4.0

Facultad de Ingeniería Publicación Oficial

1. Introducción

El método de los elementos finitos (MEF) constituye una de las principales herramientas numéricas utilizadas para el análisis estructural, debido a que permite aproximar el comportamiento de sistemas continuos mediante su discretización en elementos interconectados. Su aplicación posibilita evaluar desplazamientos y fuerzas internas en estructuras sometidas a distintas condiciones geométricas, mecánicas y de carga (Bathe, 2008; Zienkiewicz et al., 2005). Este método se utiliza ampliamente en el análisis de vigas; sin embargo, la obtención de resultados precisos no depende únicamente del procedimiento numérico empleado, sino también de las teorías matemáticas utilizadas.

Entre los modelos más utilizados para el análisis de vigas se encuentran las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko. La primera establece que las secciones transversales permanecen planas y perpendiculares al eje deformado de la viga, lo que implica despreciar las deformaciones transversales asociadas a los esfuerzos cortantes. Debido a esta simplificación, la teoría de Euler-Bernoulli resulta particularmente adecuada para elementos esbeltos cuya respuesta está predominantemente gobernada por la flexión (Craig y Taleff, 2021). Esta distinción respecto de los modelos que incorporan la deformación por cortante continúa siendo relevante en las formulaciones contemporáneas, en las que la aplicabilidad de ambos modelos depende de las características geométricas del elemento y del tipo de respuesta analizada (Khasawneh y Segalman, 2019; Zhang et al., 2020).

El segundo modelo utilizado en el análisis de vigas es el de Timoshenko, que incorpora las deformaciones por cortante en sus hipótesis de comportamiento. Esta consideración permite que la rotación de la sección transversal sea independiente de la pendiente de la línea elástica. De este modo, se obtiene una representación más general del comportamiento estructural, que adquiere mayor relevancia conforme disminuye la esbeltez del elemento (Cowper, 1966; Wang et al., 2000). En este contexto, Xu et al. (2019) aplicaron el MEF basado en la teoría de Timoshenko al análisis de vigas profundas y evidenciaron la importancia de considerar la deformación por cortante en este tipo de elementos.

Más recientemente, Khrouf y Adjemi (2026) compararon las formulaciones de Euler-Bernoulli y Bresse-Timoshenko mediante elementos finitos en Abaqus y destacaron que las diferencias entre ambos modelos adquieren mayor relevancia en vigas cortas o de mayor espesor. Asimismo, Koç (2021) mostró, mediante una formulación de elementos finitos, que las diferencias entre ambos modelos pueden variar según las condiciones de respuesta analizadas, lo que refuerza la necesidad de seleccionar la teoría de viga de acuerdo con las características particulares del problema.

Desde el punto de vista de los elementos finitos, la aplicación de estos supuestos conduce a diferentes matrices de rigidez y, consecuentemente, puede modificar los desplazamientos y las fuerzas internas obtenidas. Diversas investigaciones han abordado la formulación de elementos de Timoshenko y los problemas numéricos asociados al bloqueo por cortante (Senjanović et al., 2013; Wong et al., 2018). Investigaciones posteriores han continuado estudiando este fenómeno mediante formulaciones libres de bloqueo y procedimientos de estabilización, lo que demuestra la importancia del tratamiento numérico de la deformación por cortante en los elementos finitos basados en Timoshenko (Aguirre et al., 2023; Wong et al., 2022).

Asimismo, Więckowski y Świątkiewicz (2021) analizaron elementos basados en las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko y mostraron la influencia de la formulación seleccionada en la respuesta obtenida. Wei et al. (2022) también evidenciaron que la elección de la teoría cinemática influye en la capacidad de los modelos de elementos finitos para representar estructuras con distintas características geométricas, desde configuraciones delgadas hasta otras de mayor espesor. Por su parte, Bosten et al. (2023) utilizaron ambos modelos de viga en un esquema de verificación analítica y numérica, y evidenciaron que las diferencias entre sus hipótesis cinemáticas influyen en la respuesta calculada.

Ruocco y Reddy (2023) realizaron una comparación directa entre los modelos de Bernoulli, Timoshenko y Reddy, y evidenciaron que la incorporación progresiva de los efectos de deformación por cortante modifica la representación de la respuesta estructural. Asimismo, señalaron que la elección del modelo debe considerar el nivel de aproximación requerido. De manera complementaria, Luo et al. (2022) desarrollaron soluciones exactas para vigas de Euler-Bernoulli y Timoshenko con diferentes condiciones de apoyo y verificaron su precisión mediante resultados obtenidos con el MEF. Estos estudios refuerzan la necesidad de evaluar las diferencias entre formulaciones bajo condiciones equivalentes, debido a que una teoría mecánicamente más general no necesariamente produce variaciones de igual magnitud en todos los parámetros estructurales.

Los antecedentes mencionados podrían llevar a interpretar que siempre se obtendrán resultados diferentes según la metodología aplicada, lo cual no es necesariamente cierto. En vigas relativamente esbeltas y bajo determinadas condiciones de carga, el efecto adicional considerado por Timoshenko puede ser reducido, lo que produce respuestas globales próximas a las obtenidas mediante Euler-Bernoulli. Por este motivo, es frecuente utilizar la teoría de Euler-Bernoulli debido a su sencillez y a su incorporación en determinados programas de análisis estructural. Sin embargo, la selección de la teoría no debería basarse únicamente en su complejidad matemática, sino también en la magnitud de los efectos físicos que se pretende representar.

Esta problemática resulta especialmente relevante cuando las formulaciones se incorporan en códigos computacionales destinados al análisis de estructuras reales. En estos casos, resulta conveniente cuantificar no solo si existen diferencias entre los resultados, sino también su magnitud y relevancia práctica. La comparación entre formulaciones bajo una misma geometría, propiedades mecánicas, cargas y condiciones de apoyo permite aislar el efecto asociado al modelo teórico empleado. En este contexto, la investigación tuvo como objetivo comparar los valores máximos del momento flector y de la fuerza cortante obtenidos mediante las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko, implementadas con el método de los elementos finitos en nueve vigas de concreto armado pertenecientes a una edificación de Tacna, complementando la comparación determinística con un análisis estadístico de las diferencias pareadas.

2. Metodología

2.1. Diseño de la investigación y caso de estudio

La investigación se desarrolló bajo un enfoque cuantitativo y un diseño no experimental de tipo comparativo-computacional. La comparación se realizó mediante modelos matemáticos y simulaciones numéricas, sin intervención experimental sobre elementos estructurales físicos. Las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko se evaluaron manteniendo constantes la geometría de las vigas, las propiedades del material, las condiciones de apoyo, las cargas aplicadas y los parámetros numéricos, de manera que las variaciones observadas pudieran atribuirse al modelo teórico utilizado.

El análisis se restringió al régimen elástico lineal y a solicitaciones estáticas. Las vigas se idealizaron mediante una sección bruta y homogénea de concreto con comportamiento elástico lineal. El refuerzo longitudinal y transversal no se modeló de manera discreta. Asimismo, no se incorporaron explícitamente fenómenos como el agrietamiento progresivo, la plastificación del acero, el deterioro de la rigidez, la adherencia acero-concreto ni el comportamiento no lineal de los materiales. En consecuencia, los resultados corresponden a la respuesta estructural global de la idealización elástica adoptada.

El caso de estudio correspondió a una edificación de concreto armado ubicada en Tacna, Perú. Se seleccionaron nueve vigas estructurales de sección rectangular, correspondientes a las tipologías VP-01 y VP-02. Todas las vigas presentaron una sección transversal de 300 × 400 mm, pero diferentes configuraciones de tramos y condiciones de carga. La selección de estos elementos permitió evaluar ambas formulaciones en escenarios

estructurales diferenciados, manteniendo, para cada par de análisis, las mismas características geométricas, mecánicas y de carga.

Los parámetros mecánicos y geométricos empleados en el análisis se presentan en la Tabla 1, expresados en unidades del Sistema Internacional.

Tabla 1

Parámetros mecánicos y geométricos utilizados

Parámetro	Valor
Sección transversal	0,30 × 0,40 m
Resistencia a compresión del concreto (f'c)	20,59 MPa
Módulo de elasticidad (E)	21,32 GPa
Módulo de corte (G)	9,27 GPa
Área transversal (A)	0,120 m²
Momento de inercia (I)	1,60 × 10⁻³ m⁴
Factor de corrección por cortante (ks)	5/6 = 0,8333

2.2. Formulación mediante elementos finitos

Las teorías de Euler-Bernoulli y Timoshenko se implementaron de forma independiente en MATLAB. El procedimiento computacional comprendió la definición geométrica de los elementos, la determinación de las matrices de rigidez locales, el ensamblaje de la matriz global, la incorporación de las condiciones de contorno y las cargas externas, la solución del sistema de ecuaciones y la recuperación de las fuerzas internas. Para la formulación de Euler-Bernoulli se utilizó la matriz de rigidez local expresada en la Ecuación 1:

$$K_{EB} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde (E) representa el módulo de elasticidad, (I) es el momento de inercia de la sección transversal y (L) corresponde a la longitud del elemento.

En la formulación de Timoshenko se incorporó el parámetro asociado a la flexibilidad por cortante, definido mediante la Ecuación 2:

$$\phi = \frac{12EI}{k_s GAL^2} \quad (2)$$

Donde (G) es el módulo de corte, (A) es el área transversal y (k_s) es el factor de corrección por cortante. A partir de este parámetro, la matriz de rigidez se expresó mediante la Ecuación 3:

$$K_T = \frac{EI}{L^3(1+\phi)}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4+\phi)L^2 & -6L & (2-\phi)L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2-\phi)L^2 & -6L & (4+\phi)L^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta formulación se implementó en el código desarrollado en MATLAB. Se desarrollaron cuatro rutinas computacionales destinadas al ingreso y procesamiento de la información mediante las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko. El procedimiento permitió obtener los desplazamientos nodales y recuperar las fuerzas internas en cada elemento. La implementación computacional se desarrolló siguiendo los procedimientos generales del método de los elementos finitos aplicados a elementos de viga descritos por Bang y Kwon (2000) y Oñate (2013).

2.3. Verificación computacional

La consistencia numérica de las implementaciones se verificó mediante la comparación con los resultados obtenidos en Abaqus para una de las vigas seleccionadas. Este procedimiento permitió comprobar la consistencia de las rutinas utilizadas antes de aplicarlas al conjunto de nueve vigas.

De manera complementaria, se desarrolló en Abaqus un modelo bidimensional de la Viga 01 mediante elementos continuos, con el propósito de contrastar los resultados de las formulaciones unidimensionales con los obtenidos mediante una representación de mayor dimensionalidad. El modelo reprodujo la geometría, las condiciones de apoyo y las cargas consideradas previamente. Posteriormente, se evaluó la distribución del esfuerzo longitudinal S11 en la sección crítica. A partir del esfuerzo

máximo obtenido en las fibras extremas, se determinó un momento flector equivalente mediante la relación clásica de flexión expresada en la Ecuación 4:

$$M = \frac{\sigma I}{c} \qquad (4)$$

Donde σ corresponde al esfuerzo longitudinal extremo obtenido del modelo bidimensional, (I) es el momento de inercia de la sección transversal y (c) es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema. El momento equivalente obtenido se comparó con los valores calculados mediante las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko implementadas en MATLAB.

2.4. Análisis comparativo y estadístico

Para cada viga se determinaron los valores absolutos máximos del momento flector y de la fuerza cortante mediante ambas formulaciones. Posteriormente, se calculó la variación porcentual entre los resultados obtenidos mediante Euler-Bernoulli y Timoshenko. Debido a que ambos resultados correspondían a la misma viga evaluada mediante teorías diferentes, las observaciones se consideraron pareadas. Inicialmente, se evaluó la normalidad de las diferencias mediante la prueba de Shapiro-Wilk. Al no rechazarse la hipótesis de normalidad, se aplicó la prueba t de Student para muestras relacionadas, con un nivel de significancia de α=0,05.

La interpretación de los resultados consideró por separado la significancia estadística y la magnitud estructural de las diferencias, evitando asumir que un valor de (p<0,05) implica necesariamente una diferencia relevante desde el punto de vista ingenieril. El análisis estadístico se limitó a las nueve vigas seleccionadas y no tuvo como propósito realizar una generalización probabilística a la totalidad de las vigas de concreto armado. La selección respondió al interés de evaluar elementos con diferencias geométricas y/o en las cargas aplicadas.

3. Resultados

3.1. Verificación unidimensional del modelo computacional

La consistencia numérica de las formulaciones implementadas en MATLAB se verificó mediante la comparación de los resultados obtenidos para la Viga 01 con los correspondientes a modelos equivalentes desarrollados en Abaqus mediante elementos unidimensionales. En la Tabla 2 se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante las implementaciones desarrolladas en MATLAB y los modelos correspondientes en Abaqus.

Tabla 2

Comparación de resultados con Abaqus para la Viga 01 mediante elementos unidimensionales

Unidades	**Cortante (V)**				**Momento (M)**			
Tramo	**Primero**		**Segundo**		**Primero**		**Segundo**	
Lugar	Inicio	Final	Inicio	Final	Inicio	Final	Inicio	Final
Codigo - EB.	35,396	-58,993	58,993	-35,396	0	-5,4247	-5,4247	0
Abaqus - EB.	35,273	-58,870	58,870	-35,274	0	-5,4245	-5,4245	0
Variación (%)	0,3466	0,2078	0,2078	0,3466	0	0,00046	0,00046	0
Codigo - Tim.	35,483	-58,906	58,906	-35,483	0	-5,0889	-5,0889	0
Abaqus - Tim.	35,359	-58,785	58,785	-35,359	0	-5,0951	-5,0951	0
Variación (%)	0,35017	0,20527	0,20527	0,35017	0	0,0138	0,0138	0

Nota. EB = Euler-Bernoulli; Tim. = Timoshenko; Variación (%) = diferencia porcentual entre el código y Abaqus. El momento flector (M) se expresa en kN·m y la fuerza cortante (V), en kN.

Tabla 3

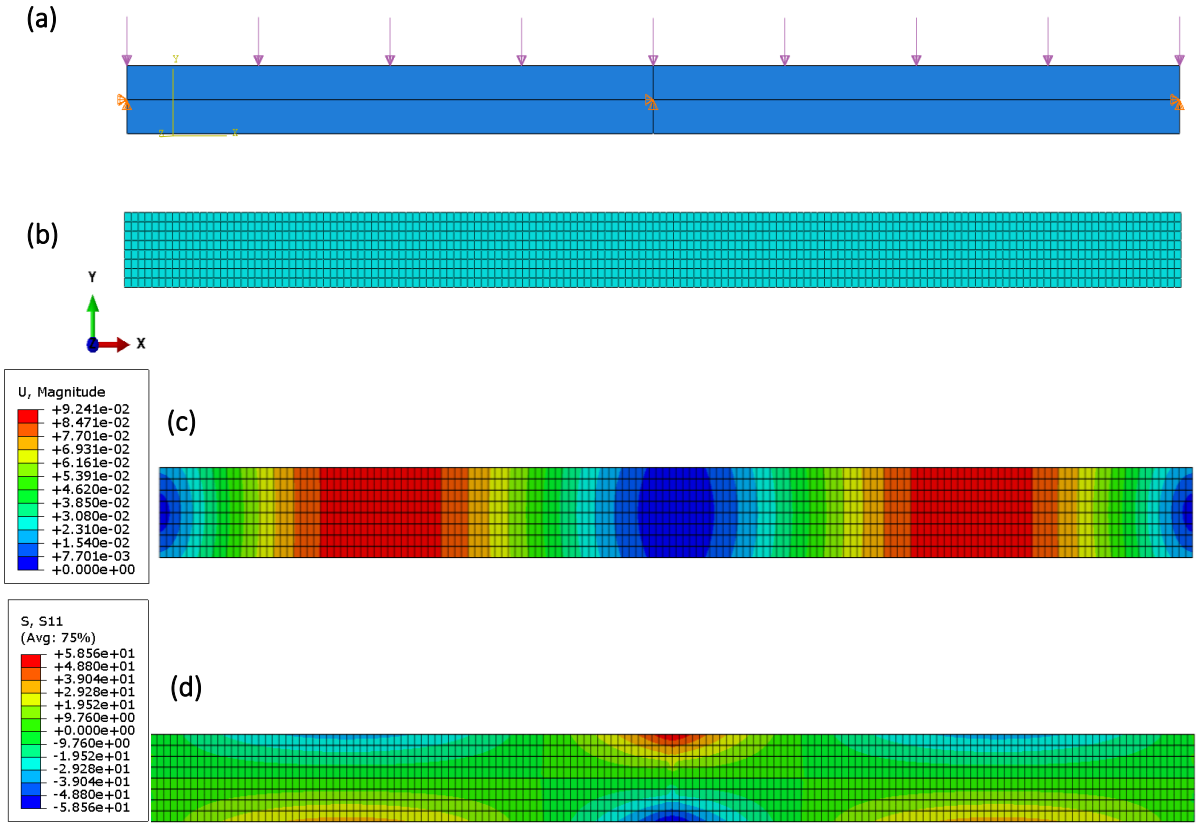
Comparación de las respuestas máximas obtenidas mediante ambas formulaciones

Viga	M_{EB}	M_T	Dif. M (%)	V_{EB}	V_T	Dif. V (%)
1	45,425	45,089	0,745	58,993	58,906	0,148
2	40,593	40,293	0,745	58,493	58,415	0,133
3	43,234	42,654	1,360	73,526	73,376	0,205
4	58,478	58,046	0,745	77,108	76,996	0,146
5	46,098	45,604	1,082	72,949	72,821	0,176
6	32,540	32,191	1,082	51,493	51,403	0,176
7	13,004	12,941	0,488	22,115	22,096	0,085
8	4,686	4,663	0,488	7,969	7,963	0,085
9	10,846	10,778	0,633	22,148	22,129	0,088

Nota. M_{EB} = momento flector máximo según Euler-Bernoulli; M_T = momento flector máximo según Timoshenko; Dif. M = diferencia porcentual entre los momentos flectores; V_{EB} = fuerza cortante máxima según Euler-Bernoulli; V_T = fuerza cortante máxima según Timoshenko; Dif. V = diferencia porcentual entre las fuerzas cortantes. Los momentos se expresan en kN·m y las fuerzas cortantes en kN.

Figura 1

Modelo bidimensional y resultados de la Viga 01 en Abaqus



Nota. (a) configuración geométrica, cargas y condiciones de apoyo; (b) malla de elementos finitos; (c) magnitud del desplazamiento; (d) distribución del esfuerzo longitudinal S11.

Las diferencias en las fuerzas cortantes fueron inferiores al 0,36 %, mientras que, para los momentos flectores, fueron prácticamente nulas en la formulación de Euler-Bernoulli y menores al 0,014 % en la de Timoshenko. Estos resultados muestran una elevada concordancia entre las implementaciones desarrolladas en MATLAB y los modelos de referencia en Abaqus.

3.2. Comparación entre Euler-Bernoulli y Timoshenko

Se compararon ambas formulaciones para cuantificar las diferencias en la respuesta estructural. La Tabla 3 presenta los valores máximos obtenidos para los momentos flectores y las fuerzas cortantes, así como las diferencias porcentuales correspondientes. Las diferencias porcentuales del momento flector máximo fluctuaron aproximadamente entre 0,488 % y 1,360 %, obteniéndose una diferencia promedio de 0,819 %. La mayor variación se presentó en la viga 03, donde Euler-Bernoulli produjo un momento máximo de 43,234 kN·m y Timoshenko de 42,654 kN·m.

En cuanto a las fuerzas cortantes, las diferencias fueron menores y variaron entre el 0,085 % y el 0,205 %, con un promedio del 0,138 %. La mayor diferencia también correspondió a la Viga 03, cuyos valores fueron de 73,526 kN mediante Euler-Bernoulli y de 73,376 kN mediante Timoshenko. Las diferencias obtenidas fueron sistemáticas, aunque de magnitud reducida. La variación máxima del momento flector fue del 1,360 %, mientras que todas las diferencias porcentuales de la fuerza cortante fueron inferiores al 0,21 %.

3.3. Verificación complementaria mediante modelo bidimensional en Abaqus

Para complementar la verificación de las formulaciones unidimensionales, se desarrolló un modelo bidimensional de la Viga 01 en Abaqus, manteniendo las condiciones geométricas, mecánicas, de apoyo y de carga consideradas en los modelos implementados en MATLAB.

La Figura 1 presenta la configuración del modelo y la discretización mediante elementos finitos utilizada en el análisis bidimensional, así como los resultados de desplazamientos y esfuerzos. Los esfuerzos longitudinales máximos se concentraron en las fibras extremas de la sección, con signos opuestos asociados al comportamiento flexional de la viga. El esfuerzo longitudinal utilizado para calcular el momento flector equivalente fue de 5,743 MPa. Aunque en la figura se visualiza un valor de 5,856 MPa, para el cálculo se seleccionó el valor correspondiente al centro del cuadrante en el borde superior.

Considerando el momento de inercia de la sección, $I=1{,}60\times10^{-3}\ m^4$ y la distancia a la fibra extrema, c=0,20 m, el esfuerzo obtenido mediante Abaqus permitió calcular un momento flector equivalente de aproximadamente 45,942 kN·m. Este valor se utilizó como referencia complementaria para comparar los resultados obtenidos mediante los modelos unidimensionales.

A continuación, la Tabla 4 presenta la comparación entre el momento flector equivalente obtenido del modelo bidimensional y los valores calculados mediante las formulaciones implementadas en MATLAB.

Tabla 4

Comparación del momento flector de la Viga 01 respecto al modelo bidimensional de Abaqus

Modelo	S11, max (MPa)	Momento máximo (kN·m)	Diferencia respecto a Abaqus 2D (%)
Abaqus 2D	5,743	45,942	-
Euler-Bernoulli MATLAB	-	45,425	1,126
Timo-shenko MATLAB	-	45,089	1,857

Los resultados muestran que ambas formulaciones unidimensionales presentaron valores próximos al momento equivalente obtenido mediante el modelo bidimensional. Para la Viga 01, la formulación de Euler-Bernoulli presentó una diferencia aproximada del 1,13 %, mientras que la de Timoshenko mostró una

diferencia del 1,86 %. Por tanto, para este caso particular, Euler-Bernoulli reprodujo con mayor proximidad el momento equivalente calculado a partir del campo de esfuerzos del modelo bidimensional. Esta observación corresponde exclusivamente a la geometría, las propiedades y las condiciones de carga de la viga analizada, por lo que no implica una superioridad general de Euler-Bernoulli frente a Timoshenko.

3.4. Análisis estadístico

Como se muestra en la Tabla 5, la prueba de Shapiro-Wilk no permitió rechazar la hipótesis de normalidad de las diferencias pareadas, tanto para los momentos flectores máximos como para las fuerzas cortantes máximas. Por ello, se aplicó la prueba *t* de Student para muestras relacionadas.

Tabla 5

Análisis estadístico comparativo

Parámetro	Shapiro-Wilk (W)	Normalidad (p_{sw})	Diferencia promedio (%)
Momento flector máximo	0,916	0,363	0,819
Fuerza cortante máxima	0,921	0,402	0,138

Nota. En ambos casos se obtuvo (*p*) igual a 0,002.

Para el momento flector máximo se obtuvo un estadístico (t=4,385) y un valor de (p=0,002), mientras que para la fuerza cortante máxima se obtuvo (t=4,481) y (p=0,002). En ambos casos, los valores de (p) fueron inferiores a 0,05, por lo que se identificaron diferencias estadísticamente significativas entre los resultados obtenidos mediante ambas formulaciones. No obstante, al considerar los resultados de las pruebas estadísticas y las diferencias porcentuales, se observó que las diferencias identificadas fueron sistemáticas, pero de magnitud reducida. Por tanto, aunque las formulaciones no produjeron valores matemáticamente idénticos, las variaciones observadas fueron pequeñas en términos de la respuesta estructural global de las nueve vigas analizadas.

4. Discusión

Los resultados obtenidos muestran que las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko proporcionaron respuestas próximas para las nueve vigas analizadas. Euler-Bernoulli presentó sistemáticamente valores ligeramente superiores de momento flector máximo y fuerza cortante máxima, con diferencias porcentuales promedio de 0,819 % y 0,138 %, respectivamente. La mayor diferencia se registró en el momento flector de la Viga 03, con un 1,36 %, mientras que la diferencia máxima en la fuerza cortante fue del 0,205 %. Estos resultados indican que las diferencias entre las formulaciones fueron reducidas para las magnitudes evaluadas y las condiciones consideradas. No obstante, la proximidad de los valores calculados no implica que ambas teorías sean equivalentes, puesto que difieren en sus hipótesis cinemáticas y en la representación de la deformación por cortante.

La diferencia entre ambas formulaciones puede interpretarse a partir de la contribución de la deformación por cortante a la respuesta de las vigas. Euler-Bernoulli supone que las secciones transversales permanecen perpendiculares al eje deformado, mientras que Timoshenko permite considerar la deformación por cortante de manera explícita. Por ello, las discrepancias entre ambas formulaciones dependen de las características geométricas del elemento y de la importancia relativa de este mecanismo de deformación (Cowper, 1966; Wang et al., 2000). Los resultados obtenidos son compatibles con esta diferencia teórica, ya que las variaciones porcentuales de las fuerzas internas máximas fueron pequeñas en las nueve vigas estudiadas. Esta interpretación también permite contextualizar los resultados de Xu et al. (2019), quienes señalaron la importancia de incorporar la deformación por cortante en vigas profundas, y de Ruocco y Reddy (2023), quienes mostraron que las diferencias entre modelos de viga dependen de las hipótesis de formulación y del parámetro estructural evaluado.

De manera similar, Khrouf y Adjemi (2026) identificaron discrepancias más notorias entre las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko en elementos cortos o de mayor

espesor. Zhang et al. (2020) también encontraron diferencias apreciables cuando la deformación por cortante adquiría mayor relevancia, mientras que Koç (2021) evidenció que las discrepancias varían según las condiciones de respuesta analizadas. Estos antecedentes permiten situar los resultados del presente estudio dentro de la dependencia de las diferencias entre formulaciones respecto de las características del elemento. Por su parte, Polizzotto (2015) abordó conceptualmente la relación entre las formulaciones clásicas de vigas y los modelos que incorporan la deformación por cortante, lo que permite contextualizar la mayor generalidad teórica de Timoshenko sin asumir que esta necesariamente producirá diferencias elevadas en todas las aplicaciones.

El análisis estadístico mostró diferencias significativas entre las formulaciones tanto para el momento flector máximo como para la fuerza cortante máxima ($p = 0{,}002$ en ambos casos). Sin embargo, las diferencias porcentuales promedio fueron de 0,819 % para el momento y de 0,138 % para el cortante. Esta combinación de resultados evidencia que la significancia estadística y la magnitud de las diferencias representan aspectos distintos de la comparación. En las nueve vigas estudiadas, las diferencias fueron sistemáticas y estadísticamente significativas, pero reducidas en términos porcentuales. Por tanto, el contraste estadístico permite identificar diferencias entre las formulaciones, aunque no determina por sí mismo su relevancia para el diseño estructural. Esta última valoración requeriría criterios específicos que permitan relacionar las variaciones calculadas con las exigencias de diseño y los márgenes de seguridad aplicables.

La verificación unidimensional mediante Abaqus mostró diferencias inferiores al 0,5 % para las magnitudes comparadas, lo que respalda la concordancia numérica de las implementaciones desarrolladas en MATLAB con los resultados de referencia. Esta comprobación es importante para interpretar las diferencias entre las formulaciones, ya que permite distinguir entre la discrepancia asociada a los resultados de los modelos y una posible inconsistencia en su implementación. Bosten et al. (2023) destacaron la importancia de emplear soluciones de referencia en la verificación de formulaciones de elementos finitos relacionadas con los modelos de Euler-Bernoulli y Timoshenko. Asimismo, Luo et al. (2022) contrastaron soluciones de ambas formulaciones mediante el método de elementos finitos, mientras que Khasawneh y Segalman (2019) evaluaron expresiones correspondientes a ambos modelos mediante procedimientos de verificación numérica. Estos antecedentes respaldan la pertinencia de comprobar la consistencia numérica antes de interpretar las diferencias entre modelos teóricos. Sin embargo, la concordancia observada en la verificación unidimensional no demuestra por sí sola que las formulaciones sean igualmente adecuadas para cualquier geometría o condición de carga.

La comparación con el modelo bidimensional de Abaqus aportó una referencia adicional para evaluar la estimación del momento flector de la Viga 01. A partir de la distribución de esfuerzos longitudinales, se obtuvo un momento equivalente de 45,942 kN·m, respecto del cual Euler-Bernoulli presentó una diferencia aproximada de 1,13 %, mientras que Timoshenko alcanzó 1,86 %. En este caso particular, la estimación de Euler-Bernoulli fue más próxima al valor de referencia. No obstante, esta diferencia debe interpretarse dentro de las condiciones específicas de la comparación, que correspondió a una sola viga y a un momento equivalente calculado a partir de los esfuerzos longitudinales del modelo bidimensional. Por ello, el resultado no permite establecer una superioridad general de Euler-Bernoulli, sino identificar cuál de las dos estimaciones presentó mayor proximidad a la referencia en el caso evaluado. Este tipo de contraste es pertinente para examinar las consecuencias de las hipótesis simplificadoras de los modelos unidimensionales frente a una representación de mayor dimensionalidad, como también se plantea en el estudio de Khrouf y Adjemi (2026).

Las diferencias entre formulaciones también deben interpretarse considerando su implementación numérica. La representación de la deformación por cortante en elementos basados en Timoshenko requiere un tratamiento numérico adecuado, pues pueden presentarse problemas como el bloqueo numérico,

especialmente al aproximarse al límite de vigas esbeltas (Aguirre et al., 2023; Wong et al., 2022). Asimismo, Wei et al. (2022) señalaron que la respuesta obtenida mediante elementos finitos depende de la teoría cinemática adoptada y de las proporciones geométricas del elemento. En el presente estudio, las diferencias reducidas en las fuerzas internas máximas muestran que las dos implementaciones proporcionaron resultados próximos bajo las condiciones analizadas. Sin embargo, no permiten concluir que las diferencias se mantendrán en otros rangos geométricos ni que los posibles efectos de la formulación numérica sean despreciables en todos los casos. La evaluación de estos aspectos requeriría considerar otras geometrías y parámetros de modelación.

Los hallazgos deben interpretarse considerando las limitaciones del estudio. El análisis se realizó bajo condiciones de comportamiento elástico lineal y cargas estáticas, mediante una representación continua del concreto armado. No se modelaron explícitamente el agrietamiento del concreto, la plastificación del acero, la interacción acero-concreto ni la degradación de rigidez. Estas condiciones delimitan el alcance de las comparaciones, ya que las respuestas obtenidas corresponden a las hipótesis de modelación adoptadas. Asimismo, las inferencias estadísticas se restringen a las nueve vigas seleccionadas y no permiten una generalización probabilística a la totalidad de vigas de concreto armado.

El principal aporte del estudio consiste en cuantificar las diferencias entre las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko para nueve vigas de concreto armado y contrastar sus resultados mediante verificaciones numéricas. Para los casos analizados, ambas formulaciones proporcionaron estimaciones próximas de las fuerzas internas máximas, aunque presentaron diferencias estadísticamente significativas. Estos hallazgos muestran que la selección de la formulación debe considerar las características geométricas y mecánicas del problema, así como los efectos que se pretende representar. No obstante, los resultados no deben extrapolarse directamente a vigas de menor esbeltez, situaciones de comportamiento no lineal, estados agrietados o solicitaciones dinámicas.

5. Conclusiones

La aplicación de las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko mediante el método de los elementos finitos permitió obtener respuestas estructurales próximas para las nueve vigas analizadas. En todos los casos, Euler-Bernoulli produjo valores ligeramente superiores de momento flector máximo y fuerza cortante máxima, lo que evidencia una diferencia sistemática entre ambas formulaciones bajo las condiciones evaluadas. En cuanto a la verificación numérica, la comparación de la Viga 01 mediante un modelo unidimensional en Abaqus mostró diferencias inferiores al 0,5 % entre los resultados del software y los obtenidos mediante el código desarrollado en MATLAB. Esta concordancia respalda la consistencia numérica de las implementaciones para las condiciones consideradas.

Por su parte, las diferencias porcentuales del momento flector máximo variaron entre 0,488 % y 1,360 %, con un promedio de 0,819 %, mientras que las correspondientes a la fuerza cortante máxima oscilaron entre 0,085 % y 0,205 %, con un promedio de 0,138 %. Estos resultados muestran que las diferencias entre las formulaciones fueron reducidas para las fuerzas internas máximas evaluadas. Sin embargo, su magnitud porcentual no permite establecer por sí sola su relevancia para el diseño estructural, ya que esta depende de los criterios de diseño aplicables. En concordancia con estas diferencias, las pruebas t de Student para muestras relacionadas identificaron diferencias estadísticamente significativas entre las formulaciones tanto para el momento flector máximo ($t = 4{,}385$; $p = 0{,}002$) como para la fuerza cortante máxima ($t = 4{,}481$; $p = 0{,}002$). No obstante, la significancia estadística coexistió con diferencias porcentuales promedio reducidas, lo que evidencia la necesidad de distinguir ambos aspectos al interpretar los resultados.

A partir de estos hallazgos, la selección entre las formulaciones de Euler-Bernoulli y Timoshenko debe considerar las características geométricas de la viga y la importancia de la deformación por cortante en la respuesta que se pretende representar. Mientras que Euler-Bernoulli puede proporcionar resultados

próximos a los de Timoshenko cuando la contribución del cortante es reducida, esta última formulación permite incorporar explícitamente dicha deformación. Por consiguiente, los resultados obtenidos no permiten establecer una superioridad general de alguna de las dos formulaciones.

Finalmente, la comparación con el modelo bidimensional de la Viga 01 en Abaqus produjo un momento equivalente de 45,942 kN·m. Respecto de este valor, Euler-Bernoulli presentó una diferencia aproximada de 1,13 %, mientras que Timoshenko alcanzó 1,86 %. En consecuencia, Euler-Bernoulli proporcionó una estimación más próxima al resultado de referencia en este caso particular. Esta observación se limita a la geometría y las condiciones de carga evaluadas, por lo que no implica una mayor precisión general de dicha formulación.

Contribución de los autores

J. E. Alvarez: Conceptualización, curación de datos, análisis formal, adquisición de fondos, investigación, metodología, administración del proyecto, recursos, software, validación, visualización, redacción del borrador original, revisión y edición. **J. C. Guevara:** Conceptualización, metodología, administración del proyecto, supervisión, redacción, revisión y edición.

Conflictos de interés

Los autores declaran no tener conflictos de interés que puedan influir en la publicación del manuscrito.

6. Referencias bibliográficas

Aguirre, A., Codina, R., y Baiges, J. (2023). A variational multiscale stabilized finite element formulation for Reissner–Mindlin plates and Timoshenko beams. *The International Journal of Applied Finite Elements and Computer Aided Engineering*, *217*(103908), 103908. https://doi.org/10.1016/j.finel.2023.103908

Bang, H., y Kwon, Y. W. (2000). *The finite element method using MATLAB* (2.ª ed.). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781315275949

Bathe, K.-J. (2008). Finite element method. En *Wiley encyclopedia of computer science and engineering*. https://doi.org/10.1002/9780470050118.ecse159

Bosten, A., Denoël, V., Cosimo, A., Linn, J., y Brüls, O. (2023). A beam contact benchmark with analytic solution. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, *103*(11), e202200151. https://doi.org/10.1002/zamm.202200151

Cowper, G. R. (1966). The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *Journal of Applied Mechanics*, *33*(2), 335–340. https://doi.org/10.1115/1.3625046

Craig, R. R., y Taleff, E. M. (2021). *Mechanics of materials* (4.ª ed.). John Wiley & Sons. https://www.wiley.com/en-us/mechanics-of-materials-4th-edition-p-9781119603757

Khasawneh, F. A., y Segalman, D. (2019). Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes. *Applied Acoustics*, *151*, 215–228. https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.03.015

Khrouf, F., y Adjemi, S. (2026). Comparative analysis of Euler–Bernoulli and Bresse–Timoshenko beam theories using mathematical formulations and finite element modeling in Abaqus CAE. *Journal of Thermal Stresses*, *49*(5), 693–711. https://doi.org/10.1080/01495739.2025.2584157

Koç, M. A. (2021). Finite element and numerical vibration analysis of a Timoshenko and Euler–Bernoulli beams traversed by a moving high-speed train. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, *43*(3), 165.

https://doi.org/10.1007/s40430-021-02835-7

Luo, J., Zhu, S., y Zhai, W. (2022). Exact closed-form solution for free vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams with intermediate elastic supports. *International Journal of Mechanical Sciences*, *213*(106842), 106842. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106842

Oñate, E. (2013). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: Volume 2: Beams, plates and shells*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8743-1

Polizzotto, C. (2015). From the Euler–Bernoulli beam to the Timoshenko one through a sequence of Reddy-type shear deformable beam models of increasing order. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *53*, 62–74. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.03.005

Ruocco, E., y Reddy, J. N. (2023). Analytical solutions of Reddy, Timoshenko and Bernoulli beam models: A comparative analysis. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *99*(104953), 104953. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2023.104953

Senjanović, I., Vladimir, N., y Cho, D. S. (2013). A shear locking-free beam finite element based on the modified Timoshenko beam theory. *Transactions of FAMENA*, *37*(4), 1–16. https://hrcak.srce.hr/116188

Wang, C. M., Reddy, J. N., y Lee, K. H. (2000). *Shear deformable beams and plates*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-08-043784-2.X5000-X

Wei, G., Lardeur, P., y Druesne, F. (2022). A new solid-beam approach based on first or higher-order beam theories for finite element analysis of thin to thick structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, *200*(103655), 103655. https://doi.org/10.1016/j.finel.2021.103655

Więckowski, Z., y Świątkiewicz, P. (2021). Stress-based FEM in the problem of bending of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams resting on elastic foundation. *Materials*, *14*(2), 460. https://doi.org/10.3390/ma14020460

Wong, F. T., Santoso, S. W., y Sutrisno, M. (2022). Locking-free Kriging-based Timoshenko beam elements using an improved implementation of the discrete shear gap technique. *Civil Engineering Dimension*, *24*(1), 11–18. https://doi.org/10.9744/ced.24.1.11-18

Wong, F. T., Sulistio, A., y Syamsoeyadi, H. (2018). Kriging-based Timoshenko beam elements with the discrete shear gap technique. *International Journal of Computational Methods*, *15*(07), 1850064. https://doi.org/10.1142/S0219876218500640

Xu, J., Li, S., Wang, B., Li, J., y Jiang, X. (2019). Analytical finite element for Timoshenko beams. *Journal of Southwest Jiaotong University*, *54*(3), 492–498. https://doi.org/10.3969/j.issn.0258-2724.20180176

Zhang, X., Thompson, D., y Sheng, X. (2020). Differences between Euler-Bernoulli and Timoshenko beam formulations for calculating the effects of moving loads on a periodically supported beam. *Journal of Sound and Vibration*, *481*(115432), 115432. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115432

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., y Zhu, J. Z. (2005). *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9